Affine Abbildungen

* Euler – Affinitäten *

Theorie und

Rechenmethoden mit Beispielen

Alle Konstruktionen

Datei Nr. 2[illegible]0

Stand 11. Dezember 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

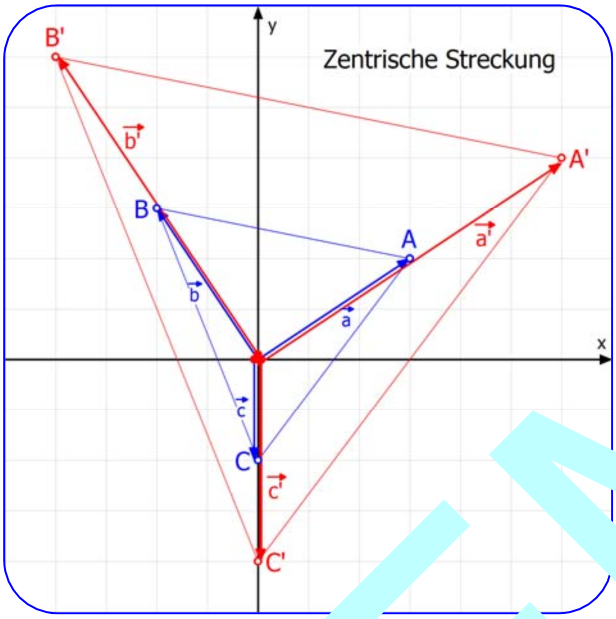
Inhalt

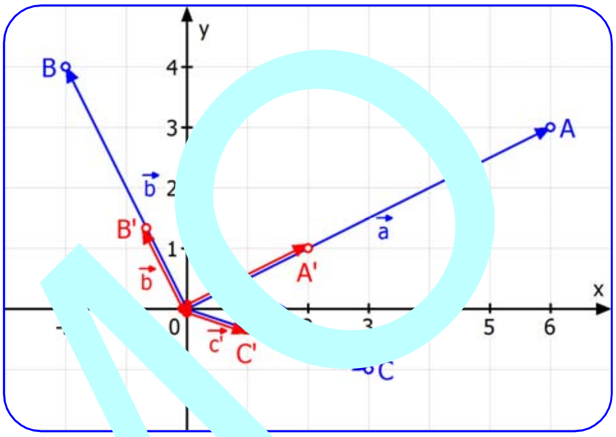
1 Euler-Affinität als Doppelstreckung

Zentrische Streckungen (siehe Text 21215) werden schon früh in der Schule behandelt. Solche Abbildungen definieren Bildpunkte dadurch, dass die Entfernung einen Punktes vom Zentrum mit einem konstanten Faktor verändert wird.

Hier zwei zentrische Streckungen vom Ursprung aus,

links mit dem Faktor $k = 2$, **rechts mit $k = \frac{1}{3}$, also eine Stauchung:**





Die **Abbildung links** zeigt, d... S...cken in parall...strecken übergehen. In dieser Abbildung erkennt man ... Strahlens...uren, die ...au zur zentrischen Streckung passen.

Für die V...oren gilt $\vec{a}\,' = 2 \cdot \vec{a}$, $\vec{b}\,' = 2 \cdot \vec{b}$, $\vec{c}\,' = 2 \cdot \vec{c}$.

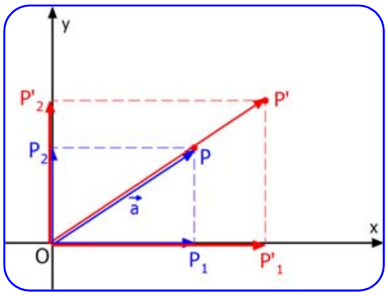
Für d... **...bildung rechts** gilt. $\vec{a}\,' = \frac{1}{3} \cdot \vec{a}$, $\vec{b}\,' = \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$, $\vec{c}\,' = \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$.

Allgeme...t für die ...svektoren: $\vec{x}\,' = k \cdot \vec{x}$

Für die Koordi...en der Bildpunkte: $\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$

bzw. in Matrixschreibweise: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Die Gleichungen $\begin{Bmatrix} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{Bmatrix}$ kann man so darstellen:



Streckung in x-Richtung: $\overrightarrow{OP'_1} = k \cdot \overrightarrow{OP_1}$

Streckung in y-Richtung: $\overrightarrow{OP'_2} = k \cdot \overrightarrow{OP_2}$

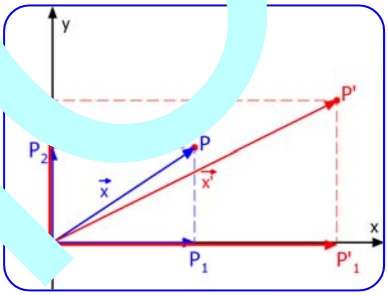
Streckung in jeder Richtung: $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$

In der Abbildung ist $k = 1{,}5$.

Wenn man **in x-Richtung mit einem anderen Faktor streckt, als in y-Richtung, dann nennt man diese Abbildung eine Euler-Affinität**.

Beispiel 1:

Streckung in x-Richtung: $\overrightarrow{OP'_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OP_1}$
Streckung in y-Richtung: $\overrightarrow{OP'_2} = 1{,}5 \cdot \overrightarrow{OP_2}$



Die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ zeigen nicht mehr in dieselben Richtungen, also liegen O, P und P' nicht mehr auf einer Geraden.

Für die einzelnen Koordinaten gilt nun: $\begin{Bmatrix} x' = 2x \\ y' = 1{,}5y \end{Bmatrix}$

In Matrixschreibweise: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

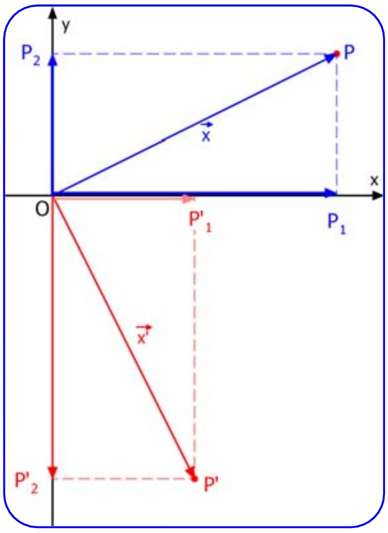
Merke: Eine affine Abbildung mit der Gleichung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

streckt in x-Richtung mit dem Faktor k_1, in y-Richtung mit dem Faktor k_2.

Sie heißt **Euler-Affinität**.

Ist speziell $k_1 = k_2$, dann wird die Euler-Affinität zur zentrischen Streckung.

Beispiel 2: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ bzw. $\begin{Bmatrix} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = -2y \end{Bmatrix}$



Hier ist der y-Streckfaktor negativ, dann wird zusätzlich am Ursprung gespiegelt.

Im Einzelnen gilt hier:

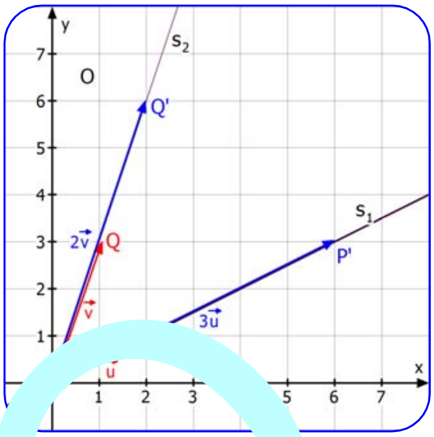
Streckung in x-Richtung: $\overrightarrow{OP'_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OP_1}$

Streckung in y-Richtung: $\overrightarrow{OP'_2} = -2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$

Berechnung von Euler-Affinitäten mit beliebigen Streck-Richtungen

Beispiel 3 – Schräge Euler-Affinität (Sehr wichtig!)

Diese Euler-Affinität streckt von O aus in Richtung $\vec u = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ mit dem Faktor 3 und in Richtung $\vec v = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ mit dem Faktor 2.



Zunächst schauen wir die Wirksamkeit dieser Abbildung in der Zeichnung an: Man sieht zwei Geraden s_1 und s_2 in Richtung dieser Vektoren $\vec u$ und $\vec v$.

Weil es sich um eine Euler-Affinität handelt gilt:

1. Alle **Punkte auf der Geraden s_1** werden also vom Ursprung aus m[illegible]em Faktor 3 „wegge[illegible]eckt“, bleiben also auf s_1, wodurch s_1 zu einer <u>Fixgeraden</u> wird[illegible]B. P → [illegible]

2. Alle **Punkte auf der Geraden s_2** werden also vom Urspru[illegible] mit dem[illegible]estreckt“, bleiben also auf s_2, wodurch s_2 zu einer <u>Fixgeraden</u> wird, z.[illegible] Q [illegible]'.

3. **Der Schnittpunkt O von s_1 und s_2** wird [illegible]m <u>einzigen [illegible]punkt</u> [illegible]Abbildung.

4. **Punkte, die nicht auf s_1 oder s_2 lie[illegible]en**, we[illegible] dadu[illegible]bgeb[illegible]et, dass man den Vektor $\overrightarrow{FP}$ in zwei Komponenten in Richtun[illegible] und $\vec v$ zerleg[illegible] diese d[illegible]t den beiden Faktoren streckt.

Das zeigt die nächste Abbil[illegible]g in der $P(5|5)$ abge[illegible]t wird.

Der Ortsvektor $\vec x = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ [illegible] mit dem P[illegible]llelogrammsche[illegible]a zerlegt in Komponenten in $\vec u$ – und $\vec v$ – Richtung:

$\vec x = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O}$[illegible]$_2$ [illegible]$\cdot 1 \cdot \vec v$

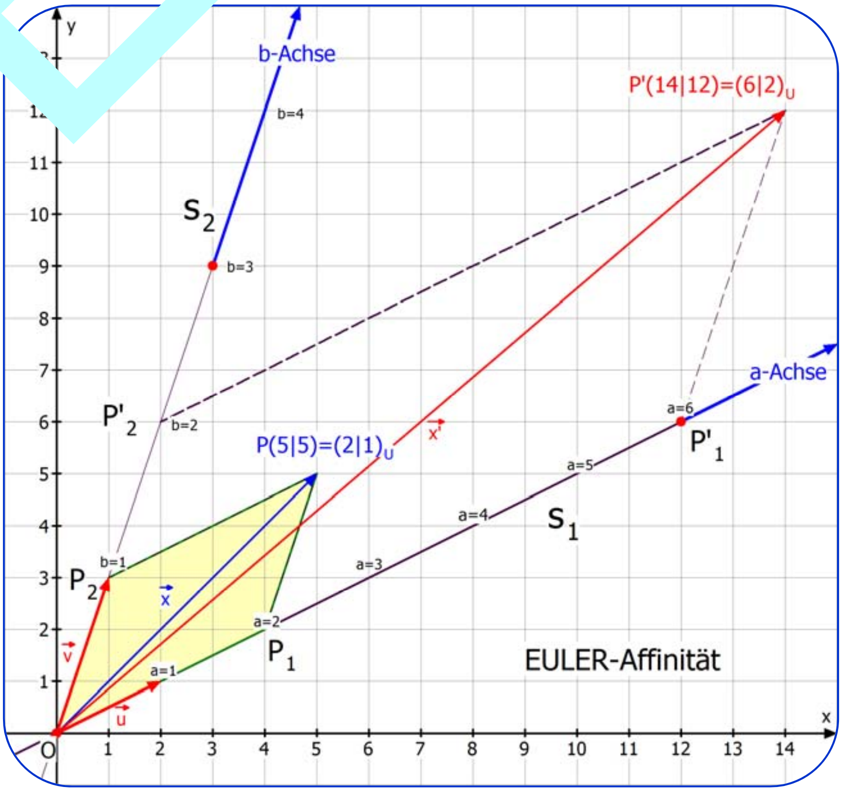
Jetzt wi[illegible]bgebildet:

Man stre[illegible] $\overrightarrow{OP'_1} = \boxed{3}\cdot\overrightarrow{OP_1}$

und $\overrightarrow{OP_2'} = \boxed{2}$[illegible]

und setzt die Komp[illegible]n wieder zusammen zu:

$\vec x' = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP'_1} + \overrightarrow{OP'_2}$



Dazu gibt es zweierlei Berechnungen.

1. Methode: Berechnung eines Bildpunktes im $\vec{u},\vec{v}$ - System:

Wir gehen aus von $\vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \boxed{a} \cdot \vec{u} + \boxed{b} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_U$

Durch Abbilden folgt: $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP'_1} + \overrightarrow{OP'_2}$

Die Euler-Affinität streckt so: $\overrightarrow{OP'_1} = \boxed{3} \cdot \overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2'} = \boxed{2} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

Also wird $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = 3 \cdot \overrightarrow{OP_1} + 2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$ (1)

d. h. $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = 3 \cdot \boxed{a} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \boxed{b} \cdot \vec{v}$

In der Koordinatenschreibweis: $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = \boxed{a} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

oder in Matrixschreibweise:: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Im $\vec{u},\vec{v}$ – System wird also $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_U$

abgebildet auf $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \end{pmatrix}_U$

Zu unserem Zahlenbeispiel:

Gegeben war $P(5\,|\,5)$: d. h. von $\vec{x} = 2 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_U$

Abbildung: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_U = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_U$

Ergebnis: $P'(6\,|\,2)_U$

2. Methode: Zurückrechnen ins $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ - System:

Wenn $\overrightarrow{OP_1} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist und $\overrightarrow{OP_2} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt dies umgerechnet:

$$\vec{x}\,' = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}_E \quad \Rightarrow \quad P'(14\,|\,12)$$

Das war jetzt eine Berechnung die darauf beruht hat, dass wir vom $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ - System in ein Eigenvektor-System gewechselt sind, das durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festgelegt ist.

Das geht auch anders, indem man gleich wieder auf das EW-System zurückrechnet.
(Nächste Seite)

2. Methode: Erstellung einer Abbildungsgleichung im $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ - System

In unserer Aufgabe ist eine Euler-Affinität gegeben durch diese Vorgaben:

Diese Euler-Affinität streckt von O aus in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit dem Faktor 3 und in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor 2.

Gegeben sind also die Eigenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ mit $\vec{u}' = \boxed{3} \cdot \vec{u}$ und $\vec{v}' = \boxed{2} \cdot \vec{v}$

das heißt also $\vec{u}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Einschub: Koordinatensysteme:

Im Koordinatensystem $E = \{O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}$ gilt $\vec{x} = \boxed{x} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{y} \cdot \vec{e}_2$, wob   man sich auf den Urs   ung

$O(0\,|\,0)$ und die beiden Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bez   t.

Daher bedeutet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soviel wie $\vec{u} = \boxed{2} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{1} \cdot \vec{e}_2$

Merke: „Die Koordinaten sind die Koeffizienten in d   Da   llung mit den Basisvektoren

Man kann für Euler-Affinitäten ein ganz sp   oordinaten   stem ne   n, das gerade die Vektoren als Basis verwendet, die **Eigenvekt**   der   dung   nd. Damit meint man die Vektoren, deren Bildvektoren di   be Richtung h   n.

In $U = \{O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\}$ gilt entspre   nd: $\vec{x} = \boxed{a} \cdot \vec{u} + \boxed{b} \cdot \vec{v}$ (*) a, b sind gesucht.

Die Methode, eine Abbil   sglei   ng zu erstellen geht hier so:

Stellt man einen Ortsvektor im   stem dar, da   gilt: $\vec{x} = \boxed{a} \cdot \vec{u} + \boxed{b} \cdot \vec{v}$

Dabei verw   en wir u $\begin{pmatrix} 2 \\ \ \end{pmatrix}$ und v $\begin{pmatrix} 1 \\ \ \end{pmatrix}$

Das   utet_ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

bzw. $\left\{ \begin{matrix} x = 2a + b \\ y = a + 3b \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Umstellen nach a u $(1) - 2 \cdot (2)$: $x - 2y = -5b \Rightarrow b = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y$

In (2): $a = y - 3b = y + \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y$

Daraus folgt für den Bildvektor: $\vec{x}' = \boxed{a} \cdot \vec{u}' + \boxed{b} \cdot \vec{v}'$

$$\vec{x}' = \left(\tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{5}y\right)\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{5}y\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5}x - \frac{6}{5}y \\ \frac{9}{5}x - \frac{3}{5}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \\ -\frac{6}{5}x + \frac{12}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5}x - \frac{2}{5}y \\ \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}y \end{pmatrix}$$

bzw. in Matrixform: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$

Zur Kontrolle wird der Bildpunkt zu $P(5\,|\,5)$ berechnet: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-2 \\ 3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Der Bildpunkt ist also $P'(14\,|\,12)$

2 Identifizierung einer Euler-Affinität

Wenn eine affine Abbildung genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, heißt sie Euleraffinität.

Eigenvektoren sind Vektoren, deren Bild ein Vielfaches vom Urbild ist. $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, k heißt der (zugehörige) Eigenwert.

Also können nur Eigenvektoren die Richtung von Fixgeraden angeben.

Fünf Beispiele

Beispiel 4

Gegeben ist α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Bestimmung der Fixpunkte durch $\vec{x}' = \vec{x}$ Das führt zum Gleichungssystem

$$\vec{x}' = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 3x + 0y = x \\ 0x + 2y = y \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad F(0\,|\,0) \text{ ist einziger Fixpunkt}$$

Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung (d. h. nicht Nullvektor) von

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3-k & 0 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist die **charakteristische Gleichung**:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 0 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-k)(2-k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = 3,\ k_2 = 2$$ Das sind die Eigenwerte.

Eigenvektoren zu $k_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 0 \\ -u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0$

Die 1. Gleichung ist entbehrlich. Wähle $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zu $k_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 = 0$

Die 2. Gleichung ist entbehrlich. Wähle $u_2 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: α hat also zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit ihren Vielfachen und es gilt: $\vec{u}' = 3\vec{u},\ \vec{v}' = 2\vec{v}$.

α hat also hat genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren und ist daher eine Euler-Affinität.

Fixgeraden sind die beiden Geraden durch F in Richtung der Eigenvektoren, also

$$g_1:\quad \vec{x} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2:\quad \vec{x} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw. $y = 0$ (x-Achse) und $x = 0$ (y-Achse).

Da diese beiden Fixgeraden orthogonal sind, spricht man von einer **orthogonalen Euler-Affinität.**

Beispiel 5

Gegeben ist α durch $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 3{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$. Zeige, dass α eine Euler-Affinität ist.

Kurzlösung:

Fixpunkte: $\vec{x}\,' = \vec{x} \iff \begin{cases} 3{,}2x - 0{,}4y = x \\ 0{,}6x + 1{,}8y = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2{,}2x - 0{,}4y = 0 & (1) \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 0 & (2) \end{cases}$

$2 \cdot (1) + (2)$: $5x = 0 \Rightarrow x_F = 0$. In (1): $y_F = 0$: $F(0\,|\,0)$ ist einziger Fixpunkt.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{vmatrix} = 0 \iff (3{,}2-k)(1{,}8-k) + 0{,}24 = 0 \iff k^2 - 5k + 6 = 0$$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Eigenvektoren zu $k_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 3{,}2-\mathbf{3} & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-\mathbf{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -1{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 1{,}2u_2 = 0 \end{cases}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $u_1 - 2u_2 = 0$.

Wähle $u_2 = r$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}\,' = 3 \cdot \vec{u}$.

Eigenvektoren zu $k_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 3{,}2-\mathbf{2} & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-\mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 0{,}2u_2 = 0 \end{cases}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $3u_1 - u_2 = 0$.

Wähle $u_1 = s$, $s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 3s \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ 3s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}\,' = 2 \cdot \vec{v}$.

Ergebnis: α hat genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren, ist also eine Euler-Affinität.

Zusatz: α hat diese zwei Fixgeraden:

f_1: $\vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$

und f_2: $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 3x$

Beispiel 6

Gegeben ist α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Fixpunkten $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x-4y+5=x \\ 4x-4y+4=y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5x-4y=-5 & (1) \\ 4x-5y=-4 & (2) \end{Bmatrix}$

$4\cdot(1)$: $20x-16y=-20$ (3)

$5\cdot(2)$: $20x-25y=-20$ (4)

(3) - (4): $9y=0 \Rightarrow y=0$

In (1): $5x=-5 \Rightarrow x=-1$. Einziger Fixpunkt ist also $F(-1\,|\,0)$.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{vmatrix} = 0$ d. h. $(\ldots k)(-4-k)+16=0$ …

Eigenwerte: $k^2-2k-8=0$ $k_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \ldots \frac{2\pm 6}{\ldots} = \begin{cases} 4 \ldots \\ -2 \ldots \end{cases}$

Eigenvektoren zu k_1 = 4: $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ldots \vec{o}$ … $\begin{Bmatrix} 2u_1 \ldots & (1) \\ 4u_1-8u_2=0 & (2) \end{Bmatrix}$

Beide Gleichungen sind Vielf… …n $u_1-2u_2=$ …

Wähle $u_2=r,\ r\in\mathbb{R} \Rightarrow u_1=2$… …ösun… …torer $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zu k_1 = -2: $\begin{pmatrix} 8 & \ldots \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 8u_1-4u_2=0 & (3) \\ 4u_1-2u_2=0 & (4) \end{Bmatrix}$

Beide Glei… …en sind V… …ache von $2u_1-u_2=0$.

Wähle $u_1=r$, r … $u_2=2r$. Lö… …gsvektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

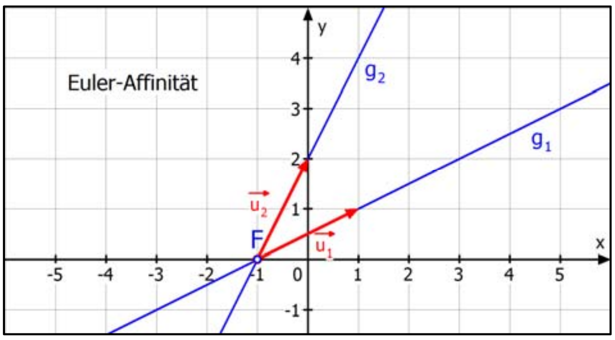
Ergebnis: …ese affi… …bildung … die … …en linear unabhängigen Eigenvektoren

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}$ … und … $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = -2\vec{v}$ (mit allen Vielfachen).

Fixgerad… …nd daher:

g1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$ b… $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

g2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 2x+2$



Beispiel 7

Gegeben ist α durch $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}\,' = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = y+3 \\ y = 2x+y+1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = y+3 \\ 0 = 2x+1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (2) erhält man $x_F = -\frac{1}{2}$, aus (1) folgt dazu $y_F = -\frac{7}{2} = -3{,}5$

α hat <u>einen</u> Fixpunkt: $F(-0{,}5 \mid -3{,}5)$.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k$ [illegible] $-k)-2 = 0 \Leftrightarrow k^2$ [illegible] $-2 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1\ldots}}{2}$ [illegible] $= \frac{1 \pm 3}{2} =$ [illegible]

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \ldots & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$ [illegible] $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2u_1 + u_2 = 0 \\ \ldots u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Eine Gleichung ist entbehrlich. [illegible]hle u_1 [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] $u_2 = 2r$.

Eigenvektoren sin[illegible]so $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r$ [illegible] also alle V[illegible]elfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1\,' = 2\vec{u}_1$

Eigenwerts[illegible]m zu $k_1 =$ [illegible]: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die zweite Gleic[illegible]t entbehrlich [illegible]hle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

[illegible]igenvekto[illegible]ind als[illegible] $=$ [illegible] $= r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2\,' = -\vec{u}_2$

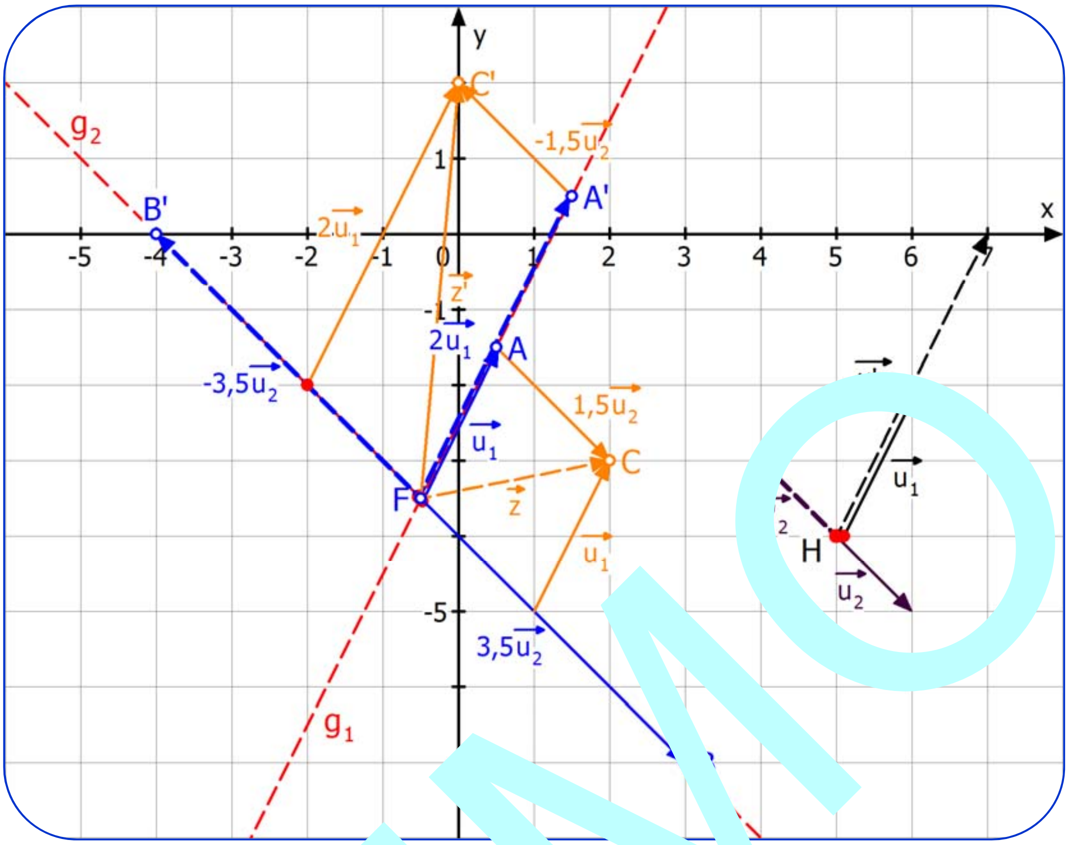
4. Sch[illegible] Bestimmung de[illegible]xgeraden:

[illegible] α genau ei[illegible] Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat, bes[illegible] zw[illegible]ixgeraden:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 2x - 2{,}5$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -x - 4$

Details zu dieser Euler-Affinität



Fixpunkt: $F(-0{,}5\,|\,-$ [illegible] $)$, Fixgeraden: g [illegible] $y = 2x - 2{,}5$, g_2: $y = -x - 4$

Abbildung: **Auf** [illegible] $A(0{,}5\,|$ [illegible] $) \in g_1 \xrightarrow{\alpha} A$ [illegible] $5\,|\,0{,}5) \in g_1$

wo [illegible] $\overrightarrow{FA'} =$ [illegible] F Streckung mit dem Faktor 2.

[illegible] g_2: [illegible] $|-7) \in g_2$ [illegible] $\rightarrow B'(-4\,|\,0) \in g_2$

wobei [illegible] $B' = -\overrightarrow{FB}$ Spiegelung an F.

Auf den F[illegible]raden liegt eine Streckung mit dem betreffenden Eigenvektor vor.

C liegt auf [illegible]ner der Fixgeraden, dann kann man sei **Bild so konstruieren**:

Punkt nic[illegible] auf den Fixgeraden: $C(2\,|\,-3) \xrightarrow{\alpha} C'(0\,|\,2)$

Man zerlegt der V[illegible] in eine Linearkombination aus den Eigenvektoren, in der Konstruktion:

$$\overrightarrow{FC} = \vec{z} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1,\ y = 1{,}5 \text{ also: } \boxed{\vec{z} = \vec{u}_1 + 1{,}5\vec{u}_2}$$

Für die Abbildung gilt dann: $\overrightarrow{FC'} = \vec{z}\,' = \vec{u}_1\,' + 1{,}5\,\vec{u}_2\,'$. Und wegen $\vec{u}_1\,' = 2\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2\,' = -\vec{u}_2$

folgt: $\overrightarrow{FC'} = \boxed{\vec{z}\,' = 2\vec{u}_1 - 1{,}5\,\vec{u}_2\,'}$ Das zugehörige Parallelogramm kann man in der Zeichnung sehen.

Rechts am Rand sind ausgehend vom Hilfspunkt H Pfeile von

$\vec{u}_1$, $\vec{u}_1\,' = 2\vec{u}_1$ sowie $\vec{u}_2, \vec{u}_2\,' = -\vec{u}_2$ dargestellt.